Hare/Niemeyer

Bezeichnungen: Hamilton Verfahren, Hare/Niemeyer oder Niemeyerverfahren, Verfahren der größten Reste, Quotenmethode mit Ausgleich nach größten Resten, Quotientenmethode mit Restausgleich nach größten Bruchteilen, Verfahren der mathematischen Proportion, Mathematisches Proportionsverfahren, largest remainder, Vinton's method of 1850

Nach Alexander Hamilton, 1755-1804, amerikanischer Politiker
Samuel F. Vinton, 1792-1862, amerikanischer Politiker
Thomas Hare (1806-1891) Jurist, London
Horst Niemeyer (*1928), Professor für Mathematik, RWTH-Aachen

Beschreibungen: Das Verfahren ist ein Quotenverfahren, die Sitze werden in 2 Schritten zugeteilt:

1. Schritt: Grundverteilung
Die Stimmen der Parteien werden durch die Gesamtstimmenzahl aller Parteien (ohne ungültige Stimmen und Enthaltungen) dividiert und mit der Gesamtsitzzahl multipliziert (=Quote). Der abgerundete Teil der Quote wird als Sitzzahl direkt zugeteilt.

2. Schritt: Restsitzverteilung
Die Restsitze werden in der Reihenfolge der größten Nachkommateile der Quoten den Parteien zugeteilt. Dabei kann die Restsitzverteilung so angepaßt werden, daß eine Partei mit (mehr als) der Hälfte aller Stimmen einen Restsitz immer dann erhält, wenn sie ohne diesen Sitz nicht die Mehrheit im Parlament hätte. (z.B. Mehrheitsklausel im Bundewahlgesetz Paragraph 6 Absatz 3)

Hat bei Bundestagswahlen das Verfahren nach d'Hondt ersetzt.

Eigenschaften:

Fehlende Konsistenz.
Quotenbedingung wird erfüllt (Idealrahmen)
Mehrheitsbedingung kann mit Mehrheitsklausel erfüllt werden.
Keine Partei wird der Größe nach bevor oder nachteilt.
(in den meisten Fällen ergibt sich eine identische Verteilung beim Verfahren Sainte Laguë)

Alabamaparadoxon
Bei Erhöhung der Gesamtsitzzahl bei gleicher Stimmenverteilung, kann eine Partei einen Sitz verlieren.

New State Paradox(Das Neue Partei Syndrom)
Durch das Streichen einer Partei mit Ihren Stimmen und Sitzen, kann eine andere Partei Sitze verlieren oder gewinnen.

Population Paradox
Bei einem anderen Wahlergebnis kann eine Partei A trotz Stimmengewinnen einen Sitz verlieren und gleichzeitig eine Partei B trotz Stimmenverlusten einen Sitz gewinnen.

Verfahrensidee und Algorithmus

Die Anteile der Parteien im abgeleiteten Gremium werden in zwei Schritten berechnet:

Im ersten Schritt werden jeweils die Anteile der Parteien in der Ausgangsmenge mit der Gesamtstärke des abgeleiteten Gremiums multipliziert und durch die Gesamtstärke des Ausgangsgremiums dividiert. Dies entspricht der streng proportionalen Berechnung im Dreisatzverfahren (s. Beispiel 1).

Im zweiten Schritt werden die sich im ersten Schritt ergebenden - in der Regel nicht ganzzahligen - Stärken aufgespalten in ihren ganzzahligen Anteil und den Rest, welcher naturgemäß kleiner als 1 ist.
Die so ermittelten ganzzahligen Anteile werden den Parteien vorab zugeschrieben. Dabei wird, wenn nicht zufällig alle Reste Null sind, mit der Summe der ganzzahligen Anteile noch nicht die gewünschte Summe des abgeleiteten Gremiums erreicht. Die fehlenden, noch zu vergebenden Anteile werden den Parteien in der Reihenfolge der Größen der beim ersten Schritt entstandenen Reste zugeteilt.

Beispiel 2: (Fortführung des Beispiels 1)

Partei	**Ergebnis der Proportionalitätsrechnung (s. Beispiel 1)**	**davon ganzer Anteil**	**Rest**	**Reihenfolge der Reste nach Größe**	**Ergebnis Hare/Niemeyer**
A	26,80...	26	0,80...	1.	26 + 1 = 27
B	15,71...	15	0,71...	2.	15 + 1 = 16
C	4,48...	4	0,48...	3.	4
	Summe	45	47		
	Soll	47			
	noch zu verteilen	2			

Vorteile

Das Verfahren hat den Vorteil, dass es sich - zumindest in seinem ersten Schritt - der proportionalen Rechnung bedient und damit in seiner Anwendung durchschaubar ist und plausibel erscheint.

Nachteile

Dessen ungeachtet kann das Verfahren insbesodere bei kleinen Anteilen zu erheblichen Abweichungen von der Proportionalität führen.

Wenn mehr Reste identisch sind, als noch Anteile anhand der Reste zu vergeben sind, liegt eine Mehrdeutigkeit vor, für die das Verfahren keine Lösung anbietet.

Das Verfahren nach Hare/Niemeyer berechnet eine Verteilung der Anteile für eine einzige vorgegebene Summe des abgeleiteten Gremiums (im obigen Beispiel für die Summe 47). Will man nicht nur die Zusammensetzung der vorgegebenen Summe aus Anteilen der einzelnen Parteien, sondern auch eine Reihenfolge bestimmen, in welcher diese Anteile zustande kommen, so muss das Verfahren mehrfach angewendet werden: man muss die Berechnungen jeweils für vorgegebene Summen von 1, 2, 3, ... bis zum gewünschten Endwert der Reihe durchführen.

Dies wäre an sich noch kein Nachteil des Verfahrens von Hare/Niemeyer für die Bestimmung einer Reihenfolge. Tatsächlich können jedoch beim Aufbau der Endsumme des abgeleiteten Gremiums aus den Berechnungen für die verschiedenen Zwischengrößen **Rücksprünge**, sogenannte "unlogische Sprünge" auftreten. Bei diesen wird, wenn man zu einem nächstgrößeren Gremium in der Berechnung fortschreitet, einer Partei ein Sitz, der ihr schon zugeteilt war, wieder entzogen.

Solche Fälle treten in Fortführung des Beispiels 1 unter anderem beim 17. Platz (also zwischen Gremien mit der Summe 16, 17 und 18) auf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3: (Fortführung des Beispiels 2, mit den Ausgangswerten von Beispiel 1. Siehe auch Musterberechnung am Ende des Papiers)

Partei	**Anteile in einem Gremium mit der Summe (nach Hare/Niemeyer)**		
	16	**17**	**18**
A	9	10	10
B	5	6	6
C	2	1	2

Partei C hätte in diesem Beispiel also in einem Gremium der Stärke 16 bereits 2 Sitze, in einem (größeren!) Gremium der Stärke 17 dagegen nur 1 Sitz.

Es versteht sich, dass eine **Reihenfolge** an solchen Rücksprung-Stellen durch das Verfahren nicht festgelegt wird.

Doch, auch wenn man sich auf die **Zusammensetzung** eines Gremiums beschränkt, ist das Vorkommen solcher Rücksprünge als Nachteil des Verfahrens anzusehen. So empfiehlt es sich bei jeder Berechnung nach diesem Verfahren, auch eine Rechnung für ein um Eins kleineres Gremium auszuführen. Nur so kann festgestellt werden, ob etwa ein unlogischer Sprung gerade für die Endsumme des zu besetzenden Gremiums auftritt - ein Ergebnis, mit dem die so benachteiligte Partei schwerlich einverstanden wäre.

D'Hondt

Bezeichnungen: Divisorverfahren mit Abrundung, d'Hondtsches Höchstzahlverfahren, Jefferson's method, Verfahren nach Hagenbach-Bischoff

nach
Thomas Jefferson, (1743-1826) Vorschlag von 1792, Verfasser der Unabhängigkeitserklärung, Präsident der American Philosophical Society und Vater der University of Virginia
Victor d' Hondt, (1841-1901) Belgischer Jurist
Eduard Hagenbach-Bischoff, (1833-1910) Schweizer Professor für Physik

Beschreibungen:

1) Als Höchstzahlverfahren
Die Stimmen der Parteien werden durch 1, 2, 3, ... *n* dividiert und die Sitze in der Reihenfolge der größten sich ergebenen Höchstzahlen zugeteilt.

2) Nach *Hagenbach-Bischoff* (als Quasi-Quotenverfahren)
1. Schritt: Grundverteilung Die Stimmen der Parteien werden durch die um Eins erhöhte Gesamtstimmenzahl dividiert und mit der um Eins erhöhten Gesamtsitzzahl multipliziert. Die abgerundeten Zahlen werden als Sitzzahlen direkt zugeteilt.
2. Schritt: Restsitzverteilung Soweit Restsitze zu verteilen sind, werden die Stimmenzahlen der Parteien durch die um 1, 2, 3, ... erhöhte schon zugeteilte Sitzzahl dividiert und Restsitze nach größten Höchstzahlen zugeteilt.

3) Als Divisorverfahren -Teile und Runde
Die Stimmen der Parteien werden durch einen geeigneten Divisor (Stimmen pro Sitz) dividiert und es wird **abgerundet**.

Beispielrechnung: Zahlenbeispiel

Fehlerminimierung:

d' Hondt maximiert die Zahl der Stimmen pro Abgeordneten (Wähler die ein Abgeordneter der bestgestelltesten Partei vertritt).

Eigenschaften:

- Tendenzielle Bevorzugung großer Parteien.
- Prinzip des vollen Preises
- Mehrheitserhaltend
- Wurde in Deutschland zum Teil durch die Verfahren nach Sainte Laguë oder Hare-Niemeyer erset

Divisorverfahren [Verfahren-Index]

---

mögliche Beschreibungen:

1) Die Stimmen der Parteien werden durch eine Folge von Divisoren geteilt. Die Sitze werden in der Reihenfolge der größten sich ergebenen Höchstzahlen zugeteilt.

2) Teile und Runde
Die Stimmen der Parteien werden durch einen geeigneten Divisor (Stimmen pro Sitz) dividiert und die sich ergebene Zahl nach der Rundungsregel des Verfahrens gerundet.
Den Quotienten (z.B. die letzte Höchstzahl aus 1) erkennt man daran, daß sich bei Anwendung der Rundungsregel insgesamt genau die Gesamtsitzzahl ergibt. Er kann durch ein zweistufiges Verfahren effektiv bestimmt werden.

Beispiele verschiedener Verfahren (hier die 5 Huntingten-Verfahren):

Jefferson - d'Hondt

Folge: 1 - 2 - 3 - ... *n*
Rundungsregel abrunden
Minimiert Maximum "Sitz pro Stimmen", Maximiert Minimum "Stimmen pro Sitz"

Webster - Sainte Laguë

Folge: 0,5 - 1,5 - 2,5 - ... *n* - 0,5
Standardrundung: zur nächsten ganzen Zahl (Rundungsgrenze arithm. Mittel)
Minimiert Abweichung "Sitz pro Stimme"

Hill - Huntingten

Folge: 0 - SQR(1*2) - SQR(2*3) - ... SQR([*n* - 1]* *n*)
Rundung: Rundungsgrenze geometrische Mittel
Minimiert die relative Abweichung "Stimmen pro Sitz"
wird zur Berechnung der Zahl der Sitze eines Staates im Repräsentantenhaus der USA benutzt.

Dean

Folge: 0 - 1 1/3 - 2,4 - 3 3/7 - ... 2/[(1/ *n*)+(1/{ *n* - 1})]
Rundung: Rundungsgrenze harmonische Mittel
Minimiert Abweichung "Stimmen pro Sitz", Repräsentationsquotient

Adams

Folge: 0 - 1 - 2 ... *n* -1
Rundungsregel: aufrunden
Minimiert Maximum "Stimmen pro Sitz", bzw. Maximiert Minimum "Sitze pro Stimmen"

Imperiali (dies ist aber kein Verhältniswahlverfahrten mehr)

Folge: 2 - 3 - 4 ... *n*+1
Rundungsregel: abrunden und minus 1

Eigenschaften von Divisorverfahren:

Konsistenz:
Wenn man jeweils zwei (oder mehr) Parteien mit ihren Sitzen und Stimmen vergleicht, kann dies zu keiner Verschiebung der Sitzverteilung führen. (Paarweiser Vergleich)
Dies hört sich nach einer vernünftigen Forderung an ein Wahlverfahren an, es ist aber eine ziemlich harte Bedingung, die die Erfüllung aller Monotoniebedingung gewährleistet und gleichzeitig die Erfüllung der Quotenbedingung nicht mehr gewährleistet.
Bei **fehlender Konsistenz** können zusätzliche Stimmen für eine Partei C dazu führen, daß Partei A einen Sitz an Partei B verliert. (So hätte nach der Bundestagswahl 1998 die FDP einen Sitz mehr und die PDS einen Sitz weniger, wenn die CDU 40000 Zweitstimmen weniger bekommen hätte.)

Unmmöglichkeitssatz von Balinski und Young:
Ein Sitzzuteilungsverfahren kann nicht gleichzeitig die Quotenbedingung erfüllen und konsistent sein.

Alle konsistenten Verfahren sind Divisorverfahren. Alle Divisorverfahren sind konsistent.

Im Gegensatz zu Quotenverfahren gibt es bei Divisorverfahren eine festdefinierte Rundungsregel und ein varibles "Stimmen pro Sitz" Verhältnis. Wenn es ein vorgegebenes "Stimmen pro Sitz" Verhältnis gibt, ist die Gesamtsitzzahl nicht mehr fest. Man spricht dann von automatischen Verfahren.

D'Hondt - Beispielrechnung [D' Hondtsches Höchstzahlverfahren]

---

cIm folgenden wird aus folgendem Wahlergebnis durch drei mathematisch äquivalente Auszählrituale die Sitzverteilung berechnet.

Angenommenes Wahlergebnis:

Partei	Stimmen
A	4160
B	3380
C	2460

Zu verteilende Sitze: 10

Höchstzahlverfahren

	A	B	C
1:	**4160 (1)**	**3380 (2)**	**2460 (3)**
2:	**2080 (4)**	**1690 (5)**	**1230 (7)**
3:	**1386 (6)**	**1126 (8)**	820 (12)
4:	**1040 (9)**	**845 (10)**	615
5:	832 (11)	676	492

6:	693	563	410

Die Sitze werden in der Reihenfolge den ersten 10 Höchstzahlen zu geordnet. Ein 11tes Mandate ginge an Partei A.
Verteilung 4 - 4 - 2

Hagenbach-Bischoffsches Verfahren

Wahlzahl nach HB: (4160+3380+2460)/11 = 909
Erster Schritt: Grundverteilung
A 4160/909=4,57
B 3380/909=3,71
C 2460/909=2,70
4+3+2=9 Mandate im ersten Schritt verteilt.
Zweiter Schritt: Nun berechne Höchstzahlen für das nächste Mandat.
A: 4160/5= 832
B: 3380/4= 845 (*)
C: 2460/3= 820
Das letzte Mandat geht an Partei B.
Verteilung: 4 - 4 - 2

Müssen weitere Mandate verteilt werden, wird nach jeder Mandatszuteilung die nächste Höchstzahl der gerade bedachten Partei berechnet, also für Partei B 3380/5=676 und das 11te Mandat ginge an Partei A.

Divisormethode

mit Divisor 840: Teile und runde

Partei	Division	Sitze (durch abrunden)
A:	4160/840 = 4,95	4
B:	3380/840 = 4,02	4
C:	2460/840 = 2,92	2

Anmerkung:
Der Divisor 840 wird hier als gegeben vorausgesetzt und rechtfertigt sich letztendlich dadurch, daß die Zuteilung paßt. Er könnte z.B. mit dem Wahlergebnis veröffentlicht werden. Er kann aber auch durch probieren oder durch die oben angegebenen Methoden bestimmt werden. Der Divisor ist auch nicht eine festdefinierte Zahl, eher ein Interval. Man könnte jede Zahl größer 832 bis 845 nehmen.
Zahlenbeispiel nach W. Jellinek (1925)